MATEMATIKA OLIMPIA
KÖRZETI SZAKASZ
2013. január 26.

X. OSZTÁLY
(4 órás program)

1.) Adott a z_1 és z_2 különböző komplex szám úgy, hogy $|z_1| = |z_1 + z_2| = |z_2|$.

Számítsa ki az $E = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2013}$ kifejezés értékét!

2.) Legyen $a, b, c \in (1, \infty)$. Mutassa ki, hogy:

a) $\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 6$

b) $\log_a \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + \log_b \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + \log_c \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq 6$

3.) Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fügvény, amely $\forall x \in \mathbb{R}$ estén teljesíti az

$f(x^2) + f(x+1) = x(x+1)(x^2 - x - 1) + 1$ összefüggést.

a) Igazolja, hogy *f* nem injektív!

b) Adjon példát olyan *f* –re, amely teljesíti az adott összefüggést!

4.) A komplex számsíkban adottak az $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ pontok, amelyek affixumai rendre a $z_0 = 1$, $z_1 = 2(\cos t + i \sin t)$, $z_2 = 2^2(\cos 2t + i \sin 2t)$, $z_n = 2^n(\cos nt + i \sin nt)$, … komplex számok.

a) Határozza meg azt a $t \in [0, \pi]$ értéket, amelyre az $A_0A_1A_2$ háromszög A_0-ban derékszögű!

b) $t = \frac{2\pi}{3}$ esetén számítsa ki *n* függvényében az $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ háromszög területét!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.